23/5/17 Μαθημα 20

F σωμα $F[x]$ πολυωνυμικός δακτύλιος

$\mathbb{R}$ σωμα $\mathbb{R}[x]$

x^2+1 αναγωγο (δεν γραφεται σαν γινομενο πρωτοβαθμιων).

$f(x) =$ αναγωγο ανεωχησει

$\quad\quad$ οχι αναγωγο = γινομενο αναγωγων

1) Στον $\mathbb{R}[x]$ υπαρχουν απειρα αναγωγα δευτερου βαθμου x^2+ax+b : $a^2-4b<0$

2) Υπαρχουν αναγωγα βαθμου ≥ 3

$f(x) \in \mathbb{R}[x] \Rightarrow f(x)$ γινομενο πρωτοβαθμιων στον $\mathbb{C}[x]$.

$x+a : a \in \mathbb{C}$

$f(x) = c(x+a_1)(x+a_2)\dots(x+a_n)$ $a_i \in \mathbb{C}$ και $c \in \mathbb{R}$

$f(-a_i)=0$ είναι ριζα αρα ριζα είναι και το συζυγές $f(-\bar{a}_i)=0$ γιατι

$\overline{f(x)} = f(x)$ (το συζυγη είναι το ίδιο το $f(x)$)

$\quad\|\quad\quad\quad\|$

$c(x+\bar{a}_1)(x+\bar{a}_2)\dots(x+\bar{a}_n)$

$a_i = \bar{a}_i \Leftrightarrow a_i \in \mathbb{R}$

$a_i \in \mathbb{C}-\mathbb{R} \Rightarrow a_i \neq \bar{a}_i$

Αρα αν $a_i \in \mathbb{C}-\mathbb{R} \Rightarrow \bar{a}_i$ είναι επίσης ρίζα.

Οι μιγαδικές ($\mathbb{C}-\mathbb{R}$) ρίζες εμφανίζονται σε ζευγη: $(x+a_i)(x+\bar{a}_i) = \overline{(x+a_i)(x+\bar{a}_i)} \in \mathbb{R}[x]$

$\Rightarrow$ Αν $f(x) \in \mathbb{R}[x] \Rightarrow f(x)$ γινομενο το πολυ δευτεροβαθμιων αναγωγων.

Προταση: Τα μονα αναγωγα πολυωνυμα στον $\mathbb{R}[x]$ ειναι τα πρωτοβαθμια και δευτεροβαθμια με αρνητική διακρινουσα.

Πορισμα: Αν $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ με $\deg(f) \geq 1$ και $\deg(f) = 2n+1$ τοτε το f εχει τουλαχιστον μια πραγματική ρίζα.

$$f(x) = \overset{\neq 0}{c}\left(x^{2n+1} + a_{2n}x^{2n} + \dots + a_0\right)$$

$$\left.\begin{array}{ll} x \to +\infty & f(x) \to +\infty \\ x \to -\infty & f(x) \to -\infty \end{array}\right\} \xrightarrow{f \text{ συνεχής}} \exists x_0 \in \mathbb{R} \text{ με } f(x_0) = 0.$$

Θεωρημα: Εστω F σωμα και $f(x) \in F[x]$ με $\deg f \geq 1$ (βαθμός), τοτε το $f(x)$ γραφεται σαν γινομενο αναγωγων.

αποδειξη: Με επαγωγή στον βαθμό.

Αν $\deg f = 1 \Rightarrow f$ αναγωγο

Υποθετουμε οτι ισχύει για πολυωνυμα βαθμού $\leq n$.

Εστω $f(x)$ με $\deg f = n+1$.

a) $f(x)$ αναγωγο. Τελειωσε

β) $f(x)$ οχι αναγωγο $\Rightarrow f(x)$ γινόμενο δηλ. $f(x) = g(x)h(x)$ με $\deg(g), \deg(h) < n+1 \Rightarrow$ Εφαρμόζεται η επαγωγή

$g(x) = g_1(x) \dots g_k(x)$ γινομενο αναγωγων.

$h(x) = h_1(x) \dots h_m(x)$ γινομενο αναγωγων.

Αρα $f(x) = g_1(x) \dots g_k(x) h_1(x) \dots h_m(x)$ γινομενο αναγωγων. ∎

π.χ. 1) $F = \mathbb{Z}_3$ $\quad f(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 1 \in F[x]$

$f(0) \not\equiv 0 \bmod 3 \quad f(1) = 1+2+2+1 \equiv 0 \bmod 3$

$f(2) = f(-1) = -1+2-2+1 \equiv 0 \bmod 3$

Αρα το f εχει ρίζες το 1 και 2 αρα

$f(x) = (x+1)(x+2)(x+a)$

$x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = (x^2+2)(x+a) = x^3 + ax^2 + 2x + 2a$

$a \equiv 2 \bmod 3$

Αρα $f(x) = (x+1)(x+2)^2$

2) $F=\mathbb{Z}_3 \quad f(x)=x^3+2x+1$
$f(0)\neq 0 \neq f(1) \Rightarrow$ Δεν εχει ριζα
$f(2)\neq 0$.

3) $f(x)=(x^2+1)^2 \in \mathbb{R}[x]$
Δεν ειναι αναγωγο γιατι ειναι γινομενο
Δεν εχει ριζες
ΟΧΙ ΡΙΖΕΣ $\not\Rightarrow$ αναγωγο

Οταν ενα πολυωνυμο ~~...~~ εχει ριζες δεν σημαινει οτι είναι αναγωγο

Στο $\mathbb{C}$ ολα τα πολυωνυμα σπανε δεν ειναι αναγωγα.

$\mathbb{Q}[x] \ni f(x)=a_v x^v + \dots + a_0$
$a_i=\frac{p_i}{q_i}$ με $(p_i,q_i)=1$, $q_i>0$
$\text{ΕΚΠ}(q_v,\dots,q_0)\, f(x)=h(x)$, $h(x)\in\mathbb{Z}[x]$
Αν το $f(x)\in\mathbb{Q}[x]$ ειναι γινομενο πολυωνυμων στον $\mathbb{Q}[x]$ τοτε και το $h(x)$ θα είναι γινομενο πολυωνυμων στον $\mathbb{Z}[x]$.
$f(x)$ αναγωγο στον $\mathbb{Q}[x] \Rightarrow h(x)$ αναγωγο στον $\mathbb{Z}[x]$
Αν $h(x)$ αναγωγο στον $\mathbb{Z}[x] \Rightarrow h(x)$ αναγωγο στον $\mathbb{Q}[x]$;;;
$h(x)=$ ΟΧΙ γινομενο στο $\mathbb{Z}[x]$
$h(x)=h_1(x)h_2(x)$, $h_1(x), h_2(x)\in\mathbb{Q}[x]$

$\text{ΕΚΠ}\begin{pmatrix}\text{Των παρανομαστων} \\ \text{Των συντελεστων των} \\ h_1 \text{ και } h_2\end{pmatrix}^2 \quad h(x)=\text{ΕΚΠ}(\quad)^2\, h_1(x)\cdot h_2(x)$

ΕΚΠ($)^2 h(x) = h_1'(x) h_2'(x)$ με $h_1'(x), h_2'(x) \in \mathbb{Z}[x]$

Λήμμα: Έστω $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Αν το $f(x)$ γράφεται σαν γινόμενο μη-σταθερών πολυωνύμων στον $\mathbb{Q}[x]$, τότε μπορεί να γραφεί σαν γινόμενο μη-σταθερών πολυωνύμων στον $\mathbb{Z}[x]$

x^2-2 ανάγωγο $\mathbb{Q}[x] \Rightarrow \mathbb{Z}[x]$
όχι ανάγωγο στον $\mathbb{R}[x]$

Θεώρημα (Κριτήριο Eisenstein)

$f(x) = a_n x^n + \dots + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$. Έστω p πρώτος. Αν $p \mid a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ αλλά $p \nmid a_n$ και $p^2 \nmid a_0$, τότε το $f(x)$ είναι ανάγωγο στον $\mathbb{Q}[x]$.

π.χ. 1) $f(x) = 2x^5 + 9x^4 + 3x^2 + 15x + 12$
$f(x) \in \mathbb{Z}[x] \leq \mathbb{Q}[x] \leq \mathbb{R}[x] \leq \mathbb{C}[x]$

$p=2 \Rightarrow p \nmid 1, p \mid 2$ και $p^2 \nmid 2 \Rightarrow$ ανάγωγο

Είναι το f ανάγωγο στον $\mathbb{Q}[x]$;
Με Eisenstein για $p=3$
$3 \nmid 2$, $3 \mid 9, 3, 15, 12$ και $3^2 \nmid 12 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ ανάγωγο
Δεν είναι ανάγωγο στον $\mathbb{R}[x]$.

2) $f(x) = x^4 + 1 \in \mathbb{Z}[x] \leq \mathbb{Q}[x]$
είναι ανάγωγο στον $\mathbb{Q}[x]$;;
Δεν είναι ανάγωγο στον $\mathbb{R}[x]$ γιατί είναι πολ. βαθμού ≥ 2
Άρα $\mathbb{R}[x]$ όχι ανάγωγο χωρίς ρίζες.
Αν $f(x) = h(x) \cdot g(x)$ στον $\mathbb{Q}[x]$ το $f(x)$ δεν θα ήταν ανάγωγο

$f(x+1) = h(x+1)\,g(x+1)$ ουτε τωρα αναγωγο

$f(x+1) = (x+1)^4 + 1 = x^4 + 4x^3 + \binom{4}{2}x^2 + 4x + 1 + 1$

$= x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 2$.

για $p=2 \underset{\text{Eisenstein}}{\Rightarrow}$ $f(x+1)$ αναγωγο

Ατοπο αφου $f(x+1) = h(x+1)\,g(x+1)$

αρα $f(x)$ αναγωγο

3) $f(x) = x^4 + 1 \in \mathbb{R}[x]$

Δεν ειναι αναγωγο $\Rightarrow f(x) = (x^2 + ax + b)(x^2 + \gamma x + \delta)$

$= x^4 + (\gamma + a)x^3 + (\delta + b + a\gamma)x^2 + (a\delta + b\gamma)x + b\delta$

πρεπει: $\gamma + a = 0 \Rightarrow \gamma = -a$

$\delta + b + a\gamma = 0 \Rightarrow \ldots$

$a\delta + b\gamma = 0 \Rightarrow \ldots$

$b\delta = 1 \Rightarrow \delta = \frac{1}{b}$

Αρα $x^4 + 1 = (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)$